Gebrochen-Rationale Funktionen

Bernhard Scheideler

Albrecht-Dürer-Gymnasium
Hagen
Hilfen zur Analysis (Q1)
20. Januar 2012

Inhalt:
Die Diskussion einer gebrochen-rationalen Funktion wird an einem Beispiel dargestellt und die Hintergründe verdeutlicht

Content:
A discussion of a rational function is explained.

Die Diskussion einer gebrochen-rationalen Funktion soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 10x^2}{3x^2 + 9x - 30}$$

Bestimmung der Definitionsmenge

Hintergrund:
Der Funktionsterm ist bei diesen Funktionen ein Bruch. In einem Bruch darf aber der Nenner nicht gleich Null werden, weil man durch Null nicht dividieren darf. Daher müssen alle Zahlen, für die der Nenner Null wird, aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden. Um diese Zahlen zu finden, lösen wir die Gleichung:

$$Nenner = 0$$

$$\begin{aligned}
3x^2 + 9x - 30 = 0 \quad & \| \quad \text{auf Normalform bringen, 3 merken} \\
\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \quad & \| \quad \text{Vieta} \\
\Leftrightarrow (x+5)(x-2) = 0 \quad & \| \quad \text{Produkt gleich 0} \\
\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2 \quad & \|
\end{aligned}$$

Ergebnis 1: Der Definitionsbereich lautet also: $\boxed{D_f = \mathbb{R}\backslash\{-5; 2\}}$
Ergebnis 2: Der Nenner kann in faktorisierter Form dargestellt werden. Dazu brauchen wir den Faktor vor der größten Potenz von x, durch den wir am Anfang dividiert hatten:
$\boxed{\text{Nenner} = 3(x+5)(x-2)}$

Symmetrie

Wenn die Unstetigkeitsstellen (also die Stellen, die aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen wurden, hier: -5 und 2) nicht symmetrisch liegen, erübrigen sich weitere Untersuchungen: Die Funktion ist nicht standardsymmetrisch.
Ansonsten untersucht man Zähler und Nenner getrennt auf Symmetrie:

Gibt es nur gradzahlige Potenzen von x, liegt Symmetrie zur y-Achse vor.
Gibt es nur ungradzahlige Potenzen von x, liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor.
Gibr es gemischte Potenzen von x, liegt keine Standardsymmetrie vor.
Eine gebrochen-rationale Funktion besitzt nur dann eine Standardsymmetrie, wenn Zähler und Nenner eine Standardsymmetrie aufweisen.
Die Gesamtsymmetrie eremittelt man nach folgendem Schema:

Zähler	Nenner	Funktion
achsensymm.	*achsensymm.*	*achsensymm.*
punktsymm.	*punktsymm.*	*achsensymm.*
achsensymm.	*punktsymm.*	*punktsymm.*
punktsymm.	*achsensymm.*	*punktsymm.*

In unserem Fall gilt also: $\boxed{\text{Keine Standardsymmetrie}}$.

Nullstellen

Hintergrund:
Ein Bruch wird Null, wenn der Zähler gleich Null ist. Es reicht also, nur den Zähler gleich Null zu setzen, und die entsprechende Gleichung zu lösen. Einen Stolperstein gibt es aber hier: Nullstellen des Zählers könnten Zahlen sein, die aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind. Daher muß man die Lösungen der Gleichung mit dem Definitionsbereich abgleichen.

$$\begin{aligned} 2x^3 + 10x^2 = 0 \quad & \| \quad \text{Normalform, merke: 2} \\ \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 = 0 \quad & \| \quad x^2\text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow x^2(x+5) = 0 \quad & \| \quad \text{Produkt gleich 0} \\ \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -5 \quad & \| \end{aligned}$$

Prüfe nun, ob eine der Lösungen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen ist:
0 ist o.k.
-5 ist ausgeschlossen.

Ergebnis 1: $\boxed{\text{Nullstellen: } 0}$
Ergebnis 2: $\boxed{\text{Zähler faktorisiert: } 2x^2(x+5)}$

Kürzen

Hintergrund:
Wir schreiben den Zähler und den Nenner in der faktorisierten Form. Wenn man Terme kürzen kann, machen wir das. Wird dieser Schritt ausgelassen oder übersehen, bekommt man beim Ableiten gewaltige Probleme.

$$f(x) = \frac{2x^2(x+5)}{3(x+5)(x-2)} = \frac{2x^2}{3(x-2)} = \frac{2x^2}{3x-6}$$

Alle weiteren Untersuchungen finden nur noch mit dem gekürzten Funktionsterm statt.

Ableitungen

Das Ableiten gebrochen-rationaler Funktionen ist etwas aufwendiger als das Ableiten der ganzrationalen Funktionen. Daher bilden wir hier zunächst nur die erste und zweite Ableitung. Diese werden in jedem Fall gebraucht. Eventuell muß die dritte Ableitung später nachbestimmt werden.
Zum Ableiten werden die Quotientenregel und die Kettenregel benötigt.
Bei der zweiten Ableitung gibt es immer eine Möglichkeit, zu kürzen. Dies muß man in jedem

Fall wahrnehmen.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4x(2x-6) - 2x^2 \cdot 3}{(3x-6)^2} \\
&= \frac{12x^2 - 24x - 6x^2}{(3x-6)^2} \\
&= \frac{6x^2 - 24x}{(3x-6)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(12x-24)(3x-6)^2 - 2(3x-6) \cdot 3 \cdot (6x^2 - 24x)}{(3x-6)^4} \\
&= \frac{(12x-24)(3x-6) - 6(6x^2 - 24x)}{(3x-6)^3} \\
&= \frac{36x^2 - 72x - 72x + 144 - [36x^2 - 144x]}{(3x-6)^3} \\
&= \frac{144}{(3x-6)^3}
\end{aligned}
$$

Lokale Extremstellen

Hintergrund:
Hier werden, wie gewohnt, die notwendige und eine hinreichende Bedingung betrachtet. Zu beachten ist aber auch hier, daß berechnete Stellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sein könnten.

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 24x &= 0 && \| \quad \text{Normalform} \\
\Leftrightarrow x^2 - 4x &= 0 && \| \quad \text{x ausklammern} \\
\Leftrightarrow x(x-4) &= 0 && \| \quad \text{Produkt gleich Null} \\
\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x &= 4 && \|
\end{aligned}
$$

Beide Zahlen liegen im Definitionsbereich.

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$
f''(0) = \frac{144}{(-6)^3} < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Maximum}
$$

$$
f''(4) = \frac{24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 144}{(3 \cdot 4 - 6)^3} = \frac{144}{216} = \frac{2}{3} > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Minimum}
$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Maximum bei } x = 0}$, $\boxed{\text{Minimum bei } x = 4}$.

Wendestellen

Hintergrund:
Hier werden, wie gewohnt, die notwendige und eine hinreichende Bedingung betrachtet. Zu beachten ist aber auch hier, daß berechnete Stellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sein könnten.

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$
144 = 0
$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Es gibt keine Wendestellen}}$.

Unstetigkeitsstellen

Hintergrund:
Wir untersuchen, welches Verhalten der Funktionsgraph in der Nähe der Stellen, die aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind, aufweist.
Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten: Es kann eine Lücke oder eine Polstelle geben.
Bei einer Lücke fehlt einfach ein unendlich kleiner Punkt im Funktionsgraphen. Wir berechnen in diesem Fall den Funktionswert (also die y-Koordinate) des fehlenden Punktes. Diese y-Koordinate nennt man den Lückenwert. Ob eine Lücke vorliegt ist ganz einfach festzustellen: Wir setzen die entsprechende Zahl für x in den (gekürzten) Funktionsterm ein. Ist der Nenner ungleich Null, liegt eine Lücke vor.
Ist der Nenner auch im gekürzten Funktionsterm gleich Null, liegt eine Polstelle vor. In diesem Fall geht der Funktionsgraph an dieser Stelle gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$. Das Verhalten des Graphen kann aber rechts und links von einer Polstelle verschieden sein. Ein Graph kann also links von der Polstelle gegen $-\infty$ und rechts gegen $+\infty$ gehen. Insgesamt sind also 4 Fälle möglich. Dies ist bei Polstellen zu untersuchen. Verhält sich der Graph rechts und links von der Polstelle gleichartig, spricht man von einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, ansonsten von einer Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

$x = -5$

Einsetzen in den (gekürzten) Funktionsterm:

$$f(-5) = \frac{2 \cdot (-5)^2}{3 \cdot (-5) - 6} = \frac{50}{-21} \approx -2,4$$

Da der Nenner ungleich Null ist, liegt eine Lücke vor.
Ergebnis 1: $\boxed{\text{Lücke, Lückenwert} \approx \text{-2,4}}$

$x = 2$

Prüfe, ob der Nenner ungleich Null ist:

$$3 \cdot 2 - 6 = 6 - 6 = 0$$

Also liegt eine Polstelle vor.
Das Vorzeichen links und rechts von 2 muß ermittelt werden:
Dazu wird das Vorzeichen aller Faktoren im Bruch ermittelt.
Faktoren: $2x^2, 3x - 6$.
i) links von 2 ($x < 2$, also z.B.: x = 1,5):

Faktor	Vorzeichen
$2x^2$	$+$
$3x - 6$	$-$

Zusammen: + und - ergibt - .
ii) rechts von 2 ($x > 2$, also z.B.: x = 2,5):

Faktor	Vorzeichen
$2x^2$	$+$
$3x - 6$	$+$

Zusammen: + und + ergibt + .
In mathematischer Schreibweise:

$$\lim_{x \to 2, x < 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2, x > 2} f(x) = +\infty$$

Ergebnis 2: $\boxed{\text{Polstelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +}}$.

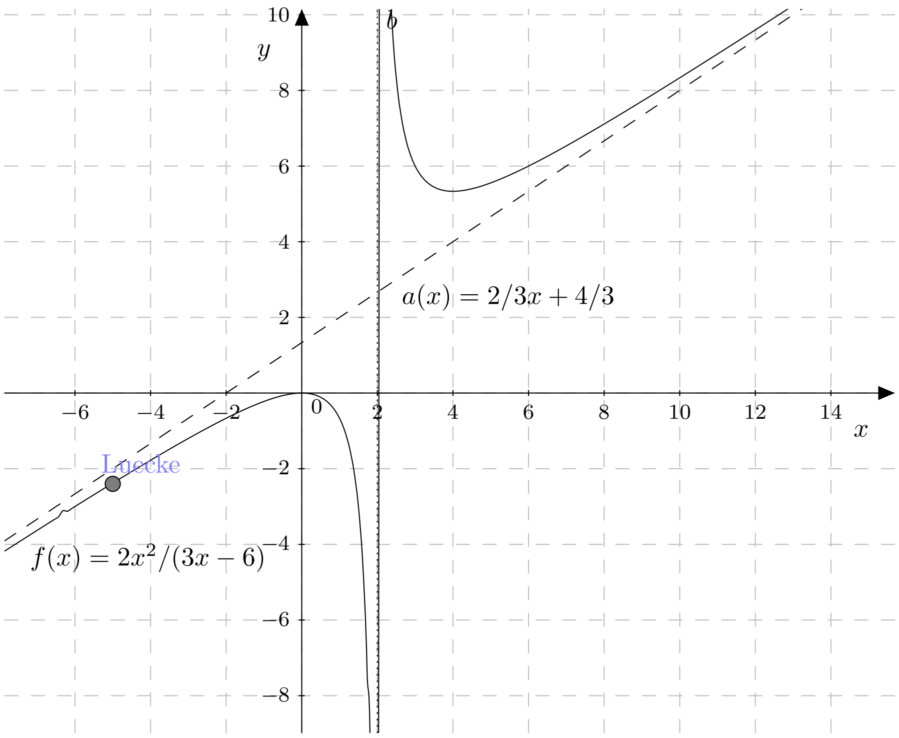
Asymptote:

Hintergrund:
Um das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \to \pm\infty$ zu untersuchen, dividiert man einfach den Zähler durch den Nenner mit Hilfe einer Polynomdivision. Diese Division geht nicht vollständig auf. Man erhält statt dessen ein Teilergebnis und einen Rest. Der Restterm hat aber immer die Eigenschaft, dass er gegen 0 geht, wenn $x \to \pm\infty$ geht. Man sagt: Die Polynomdivision trennt den Funktionsterm einer gebrochen-rationalen Funktion auf in einen ganzrationalen Anteil und einen rein gebrochenen Anteil. Rein gebrochen bedeutet in diesem Fall. dass die größte Potenz von x im Zähler kleiner als die größte Potenz von x im Nenner ist.
Der ganzrationale Teil läßt sich als Funktionsterm einer neuen Funktion interpretieren, der sich der Graph unserer gebrochen-rationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ annähert, einer Asymptoten also.

$$\begin{array}{l}
\left(\quad 2x^2\right) \div \left(3x-6\right) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + \dfrac{8}{3x-6} \\
\underline{-\,2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad 4x \\
\qquad\quad \underline{-\,4x + 8} \\
\qquad\qquad\quad 8
\end{array}$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Asymptote: } a(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}}$

Graph:



Weitere Beispiele zum Üben:

a) $f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x^2-2x-3}$ b) $g(x) = \frac{x^3-x^2-14x+24}{x^2-2x-3}$ c) $h(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{-x^3+3x^2-2x}$