Im Folgenden findet man Lösungen für die Aufgabe 1981/3 aus dem Leistungskursabitur aus Bayern.

- 1. Für welche Werte von a $\in \mathbb{R}$ sind die Vektoren u_1, u_2 und u_3 linear abhängig, für welche linear unabhängig?

  u_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix}$

  u_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$

  u_3: $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$

  Lösung:

  Wenn mane Vektoren betrachtet, dann sieht man, dass die Vektoren auf den ersten Blick scheinen, als ob sie linear unabhängig voneinander sind. Um das zu überprÃ¼fen, haben wir ein Lineares Gleichungssystem verwendet und es versucht mit dem Determinantenverfahren zu lösen:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & a & 2a & 1 \\ 2 & -a & 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = 3 + 2a - [-a^2 + 6a] \tag{1}$$

  Nun lässt man die quadratische Gleichung:

  $3+2a-[-a^2+6] = a^2-4a+3 = 0 \Leftrightarrow (a-1) = 0v(a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 1va = 3$

  Lösung: Für die herausgefundenen Werte von a sind die Vektoren linear abhängig.

2. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind die drei Geraden gegeben:

$$1.)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \vec{u}_1 \qquad 2.)\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \vec{u}_2 3.)\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2\hat{A}' \end{pmatrix} + t * \vec{u}_3$$

$(r, s, t \in \mathbb{R})$

Aufgaben

a) Weisen sie nach, dass die drei Geraden in einer Ebene E liegen.
b)Geben Sie fär E eine Gleichung sowohl in Normalform als auch in Parameterform an.
c) Bestimmen sie den Spiegelpunkt D' von D(8—2—6) bezüglich der Ebene E.

Lösungen

a)

1. Lagebeziehung:
Die Richtungsvektoren der Geraden sind linear unabhängig. Nun bildet man den Differenzvektor der Stützvektoren von zwei Geraden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{3+2-[6-1]=0} \rightarrow \mathit{linearabhängig}$$

2. Gleichsetzung der Terme:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 1 + r = 2 + t \\ 2r = 1 + t \\ 2 + 2r = 1 - t \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r - t = 1 \\ 2r - t = 1 \\ 2r + t = -1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3r = 0 \\ 4r = 0 \\ t = -1 \end{vmatrix}$$

Nun muss man den herausgefundenen Parameter in die Geradengleichung einsetzen:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & c \\ 2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Die Kooradinaten des Schnittpunktes sind (1|0|2).

3. Herstellung der Ebenengleichung in der Normalenform:

$$\vec{E}: n * \left[\vec{OX} - \vec{OS}\right] = 0$$

Als nächstes muss der Normalenvektor n mithilfe des Kreuzproduktes bestimmt werden:

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 2+1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\vec{OX} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Als nächsten Schritt wird der Term der Geraden g_3 in die eben herausgefundene Ebenengleichung für $\vec{OX}$ eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow 0v + 0 = 0$$

Dadurch wurde bewiesen, dass die Geraden alle in einer Ebene liegen.

b)

Normalenform:

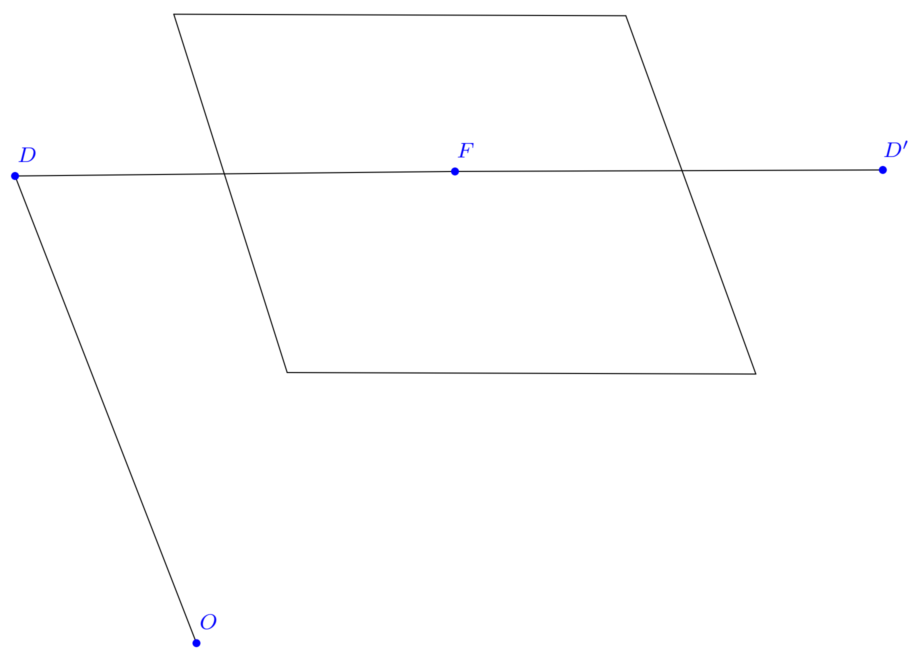
$$\vec{E}: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\vec{OX} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Parameterform:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

Ebene E:



Gegeben ist der Punkt D mit den Koordinaten (8|2|6). Gesucht wird nun der Spiegelpunkt D' bezüglich der Ebene E.

$$\vec{OD'} = \vec{OD} + 2 * \vec{DF}$$

1. Bestimmung der Geraden h:

$$\vec{OX} = \vec{OD} + a * n$$

$$\Leftrightarrow \vec{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Einsetzen des Termes der Geraden h in die Ebenengleichung:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -26 - 16a + 9a + a = 0 \Leftrightarrow -26 + 26a = 0 \Leftrightarrow 26a = 26 \Leftrightarrow a = 1$$

Nun muss man den Parameter a verdoppeln, da man den Spiegelpunkt berechnen willund er doppelt so lang von D entfernt ist. Durch das einsetzen ergibt sich dann folgende Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunt D' von D besitzt die Koordinaten (0|8|4).

3. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes C con g_2 und g_3.

$$g_2\colon \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_3\colon \; = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Gleichsetzen der Terme: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{c} 2 + s = 2 \\ 1 + s = t \\ 1 - s = -2 + 3t \end{array} \right|$$

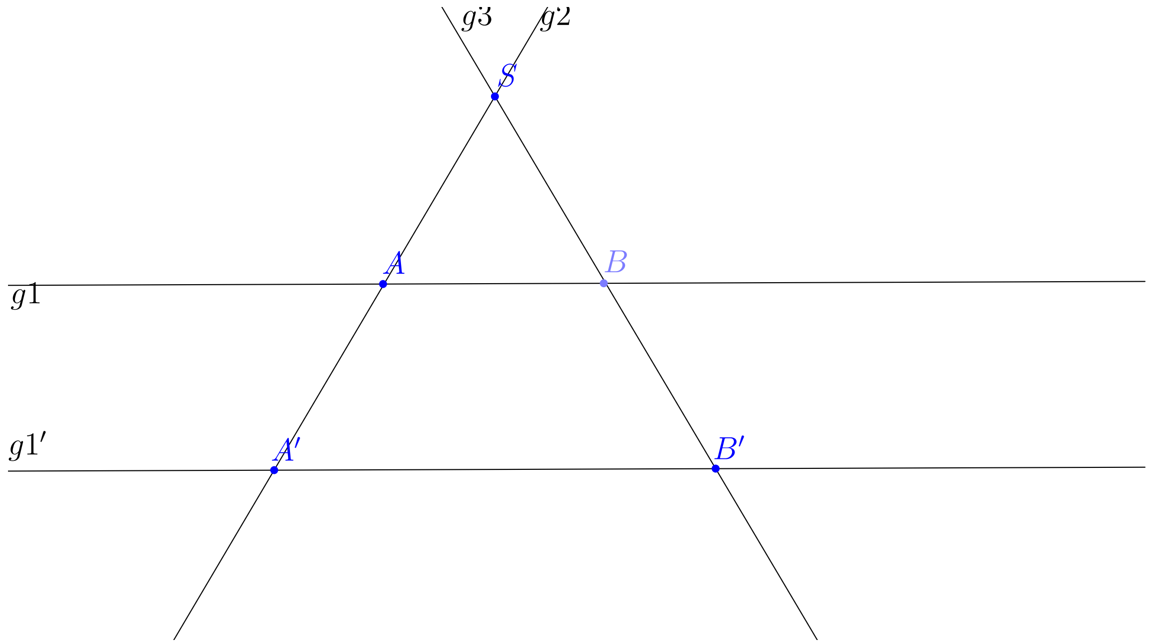
$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} s = 0 \\ s - t = -1 \\ -s - 3t = -3 \end{array} \right|$$

Einsetzen von s in g_2:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit wäre berechnet worden, dass der Schnittpunkt C von g_2 und g_3 die Koordinaten (2|1|1) besitzt.

3b)



Zunächst wird der Punkt A (der Geraden g_1 und g_2) bestimmt.

$$\left|\begin{array}{c} 1+a=2 \\ 2a=b \\ 2+2a=-2+3b \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a=1 \\ 2a=b \\ ... \end{array}\right| \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{OB} 1. Schnittpunktberechnung$$

g_1 und g_3:

$$\left|\begin{array}{c} 1+a=2 \\ 2a=b \\ 2+2a=-2+3b \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a=1 \\ 2a=b \\ ... \end{array}\right| \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2: Schnittpunktberechnung von g_1 und g_2:

$$\left|\begin{array}{c} 1+a=2+b \\ 2a=1+b \\ 2+2a=1-b \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a-b=1 \\ 2a-b=1 \\ 2a+b=-1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a=0 \\ ... \\ ... \end{array}\right| \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3: Suche nach den Punkten A' und B' durch Ãœberpr Ã$\frac{1}{4}$fung der LÃnge:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} |\vec{AB}| = \sqrt{9} = 3$$

$$\mathrm{g}_3 : \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow a = 1 \Rightarrow B(2|2|4)$$

$$\vec{OB'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(2|3|7)$$

$$g_2 : \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow b = -1 \Rightarrow A(1|0|2)$$

$$\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0|-1|3)$$

$$\vec{A'B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{A'B'}| = | \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} | = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

Somit wäre bewiesen worden, dass die Punkte A' und B' von einander 6 Einheiten entfernt sind und somit auch die gesuchten Punkte sind.

1982/1

Nicole, Jeeraporn, Celina, Sebastian

18. Mai 2012

Ebenenschar: $tx_1 + x_2 - x_3 - 2t = 0 \quad \text{t} \in \mathbb{R}$

1. a) E_0: $y - z = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} = 0$$

E_1: $x + y - z - 2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} - 2 = 0$$

$$E_0\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right] - 2 = 0$$

$1+\lambda - 2 = 0$

$\lambda = 1$

$$g_s\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{s:}\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}}$$

E_t: $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} - 2t = 0$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} \text{t} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 = 0$$

2t+1-1+$\sigma(0+1+1) - 2t = 0$
2t-2t=0
0=0

$\rightarrow$ *s liegt auf allen Ebenen der Schar*

1.b) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Suche Normalenvektor (90°) *zur Ebene* :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-(-8) \\ -4-0 \\ -8-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen einen Vektor, der zum Normalenvektor der Ebene senkrecht steht:

$\Rightarrow n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor muss aber auch senkrecht zur Gerade sein:

$\Rightarrow n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -4z = 0 \\ z+y = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z = 0 \\ z+y = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z = 0 \\ y = 0 \end{vmatrix}$$

Suche beliebige Zahl für x , bsp. 1: n= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

bilde neue Gerade mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Stützvektor (da sie durch den Ursprung gehen muss) und dem gefundenen Vektor n:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechne Schnittpunkt der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2=\mu \\ 1+\lambda=0 \\ 1+\lambda=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} \mu=2 \\ \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \end{matrix}\right|$$

$$\rightarrow \textit{setze} \quad \textit{eine} \quad \textit{Variable} \quad \textit{ein}, \textit{bsp.}\mu=2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrag OL errechnen:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2$$

2.

die Normalenvektoren müssen senkrecht aufeinander stehen

$\rightarrow Skalarprodukt \quad muss = 0 \quad sein$

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

x$\cdot x_2 + 1 + 1 = 0| - 2$
x$\cdot x_2 = -2$

$\Rightarrow t_1 \cdot t_2 = -2, sonst \quad Gleichung \quad nicht \quad erf\ddot{u}llt, Beispiel:$

t$_1 = 1 \quad t_2 = -2 \quad geht \quad nicht, \quad wenn \quad t_1/t_2 = 0, \quad da \quad 0 \cdot irgendwas \neq -2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{-2+1+1=0}$$

$$3.)\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x=1; y=2; z=0; $\quad$ n= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\overrightarrow{OX} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} - 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow 2 - 2 = 0$
$\rightarrow s \quad liegt \quad in \quad F$

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} - 2t = 0$$
$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2t = 0$$

$\cdot Winkel \quad zwischen \quad F \quad und \quad E_1$
$\rightarrow Normalenvektor$

$$\left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} \right|$$

$= 1/\sqrt{1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
$\cos^{-}1(\sqrt{3}/3) = 54,731^\circ$
$90^\circ - 54,73^\circ = 35,26^\circ$

4.)

Abstand zwischen Punkt und Ebene

$\rightarrow$ *Hessesche Normalenform*

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{OX} - 2t = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{t^2 + 1 + 1} = \sqrt{t^2 + 2}$$

HNF: $\left| (1/\sqrt{t^2+2}) \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - (2t/\sqrt{t^2+2}) \right| = \sqrt{3}$

$$\left| (5t + 6 - 2t)/\sqrt{t^2+2} \right| = \sqrt{3}$$

$$\left| (3t + 6)/\sqrt{t^2+2} \right| = \sqrt{3}$$

$$(3\mathrm{t}+6)/\sqrt{t^2+2} = \pm\sqrt{3}$$

$(9\mathrm{t}^2 + 36t + 36)/(t^2 + 2) = 3 \leftarrow$ *binomische Formel*

$9\mathrm{t}^2 + 36t + 36 = 3t^2 + 6$

$6\mathrm{t}^2 + 36t + 30 = 0$

$|\, t^2 + 6t + 5 = 0$

$|\, t = -1 \quad v \quad t = -5$

1981/2

Nils Kalbe, Miriam Kesting, Lisa Röttger, Leander Willeke

May 16, 2012

Aufgabe 1a

$$A(0|0|0) \qquad B(3|0|6) \qquad C(1|6|2)$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\vec{OX} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{OX} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2k - \frac{k}{2} = 0 \qquad \Big| + 2\frac{1}{2}k$$

$$\Leftrightarrow 5 = 2\frac{1}{2}k \qquad \Big| \div 2,5$$

$$\Leftrightarrow 2 = k$$

Überprüfung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ liegt in Ebene

Aufgabe1b

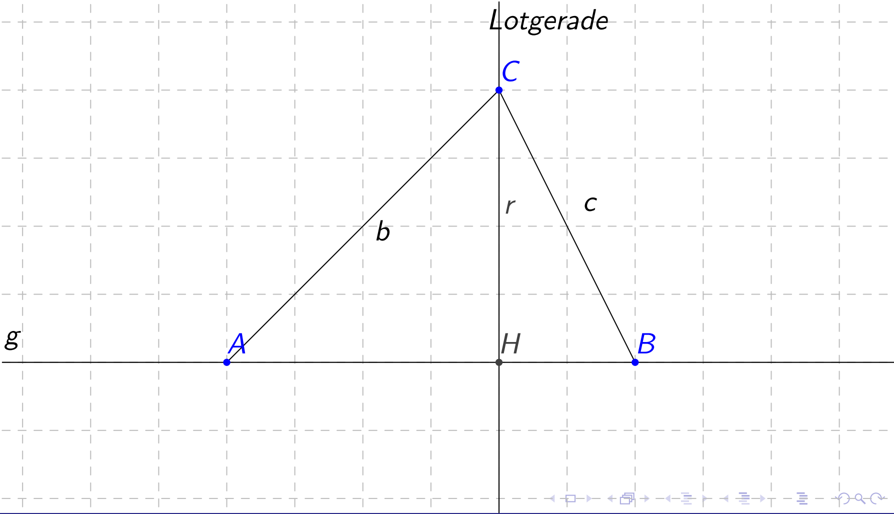
$$\vec{CD_K} = \vec{OD_K} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 4-2k \\ -5 \\ k-2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-2k \\ -5 \\ k-2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 4-2k \\ -5 \\ k-2 \end{pmatrix} \right|} \right| = \left| \frac{0}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 4-2k \\ -5 \\ k-2 \end{pmatrix} \right|} \right|$$

$\rightarrow$ wird 0 dividiert, ist das Ergebnis bei jedem Nenner 0

$$\rightarrow \arccos(0) = 90^\circ$$

Aufgabe 2a



$$E_{ABC}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{OX} = 0 \qquad n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) $$r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad 2x - z = 0$$

2) $$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x + 6z = 0 \qquad \left| \begin{array}{c} 2x - z = 0 \\ 3x + 6z = 0 \end{array} \right|$$

$$x = 0 \qquad y = 1 \qquad z = 0$$

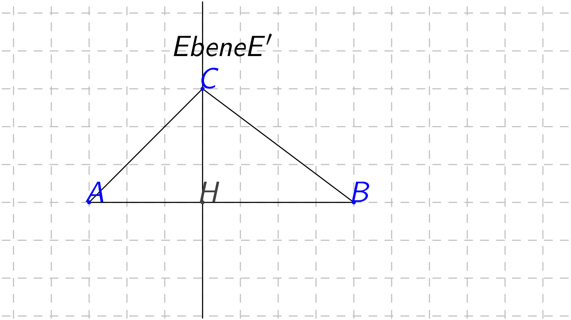
$$l : \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 = 3\lambda \\ 6 + \sigma = 0 \\ 2 = 6\lambda \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \lambda = \frac{1}{3} \\ \sigma = -6 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad H(1|0|2)$$

Aufgabe 2b



Vektor $\vec{CH}$ und $\vec{AB}$ stehen senkrecht aufeinander (s. erste Aufgabenteil), also muss $\vec{AB}$ auch senkrecht zur Ebene E' stehen, da $\vec{CH}$ in der Ebene CDD_K liegt.

Aufgabe 3a

$$E_{ABC}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{OX} = 0 \qquad \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,25}$$

$$E_{ABC_{HNF}}: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1{,}25}} \\ 0 \\ -\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}25}} \end{pmatrix} \vec{OX} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1{,}25}} \\ 0 \\ -\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}25}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \left[\frac{5}{\sqrt{1,25}} - \frac{2k}{\sqrt{1,25}} - \frac{0,5k}{\sqrt{1,25}}\right] = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}k$$

Aufgabe 3b

$$g : \vec{OX} = \begin{pmatrix} 5-2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{OX} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5-2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = 0$$

b)

$$\Leftrightarrow 5 - 2k + 0 - \frac{1}{2}k + (1 + 0 + \frac{1}{4})\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2,5k + 1,25\lambda = 0 \qquad | - (5 - 2,5k)$$

$$\Leftrightarrow 1,25\lambda = -5 + 2,5k \qquad | \div 1,25$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -4 + 2k$$

$$\vec{OD}'_K = \begin{pmatrix} 5 - 2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + (-4 + 2k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$= \begin{pmatrix} 5-2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4+2k \\ 0 \\ 2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D_K' = (1|1|2)$$