Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen mit Hilfe der Normalenform

Bernhard Scheideler

Albrecht-Dürer-Gymnasium
Hagen

Hilfen zur Analytischen Geometrie (13)
2. Dezember 2011

Inhalt:
Die Lagebeziehungen zwischen einer Gerade und einer Ebene bzw. zwischen zwei Ebenen unter Benutzung der Normalenform von Ebenen werden an Beispielen und allgemein dargestellt. Die Berechnung des Schnittwinkels (wenn vorhanden) wird erläutert.

Content:
Relationship of lines und planes in a 3-dimensional space, calculation of angles, if there is any kind of intersection

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen bzw. Ebenen und Ebenen sind ein bedeutsamer Aspekt der Analytischen Geometrie. Liegt eine Ebene dabei in der Normalenform vor, lässt sich das Problem meist rechnerisch wesentlich einfacher lösen. Daher geht man in diesen Fällen so vor, dass zunächst eine Ebene in die Normalenform umgewandelt wird.

2 Ebene aus der Parameterform in die Normalenform umwandeln

Gegeben ist die Ebene E mit

$$E: \quad \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Um diese Ebene in die Normalenform zu bringen, braucht man einen Normalenvektor n mit $n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor steht auf allen Vektoren in der Ebene senkrecht, also auch auf den beiden Richtungsvektoren. Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 2y + 9z = 0$$

$$und: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y + 6z = 0$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 4x + 2y + 9z & = & 0 \\ 3x + y + 6z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Hier treffen drei Variable auf zwei Gleichungen. Daher gibt es keine eindeutige Lösung, sondern u.U. unendlich viele Lösungen. Es gibt ja auch unendlich viele (verschieden lange) Normalenvektoren zu einer Ebene. Daher wählt man für eine Variable einen Wert vor und erhält ein eindeutig lösbares Gleichungssystem.

Setze x = 1 ,

$$\begin{vmatrix} 2y + 9z & = & -4 \\ y + 6z & = & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -3z & = & 2 \\ y & = & -3 - 6z \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} z & = & -\frac{2}{3} \\ y & = & -3 + 4 = 1 \end{vmatrix}$$

Somit ist $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ oder $\tilde{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Jetzt wird die Ebenengleichung in der Normalenform mithilfe des Stützvektors der Ebene konstruiert:

$$E: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} [\vec{OX} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}] = 0$$

$$E: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{OX} - (6 + 9 - 2) = 0$$

$$E: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{OX} - 13 = 0$$

3 Gerade und Ebene

Die Beziehung der Ebene E zur Geraden g mit

$$g: \quad \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll geklärt werden. Die Lage der Gerade wird durch ihren Richtungsvektor beschrieben, die der Ebene durch deren Normalenvektor. Liegt eine Form von Parallelität vor, stehen diese Vektoren senkrecht aufeinander. Wir bilden daher zunächst das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 6 - 2 = 7 \neq 0$$

Also schneiden sich Gerade und Ebene. Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzt man den Term der Geradengleichung in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}] - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3 + 0 - 4) + \nu(3 + 6 - 2) - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 7\nu = 14 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = 2$$

Diesen Wert setzt man in die Geradengleichung ein, um den Schnittpunkt zu bestimmen:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

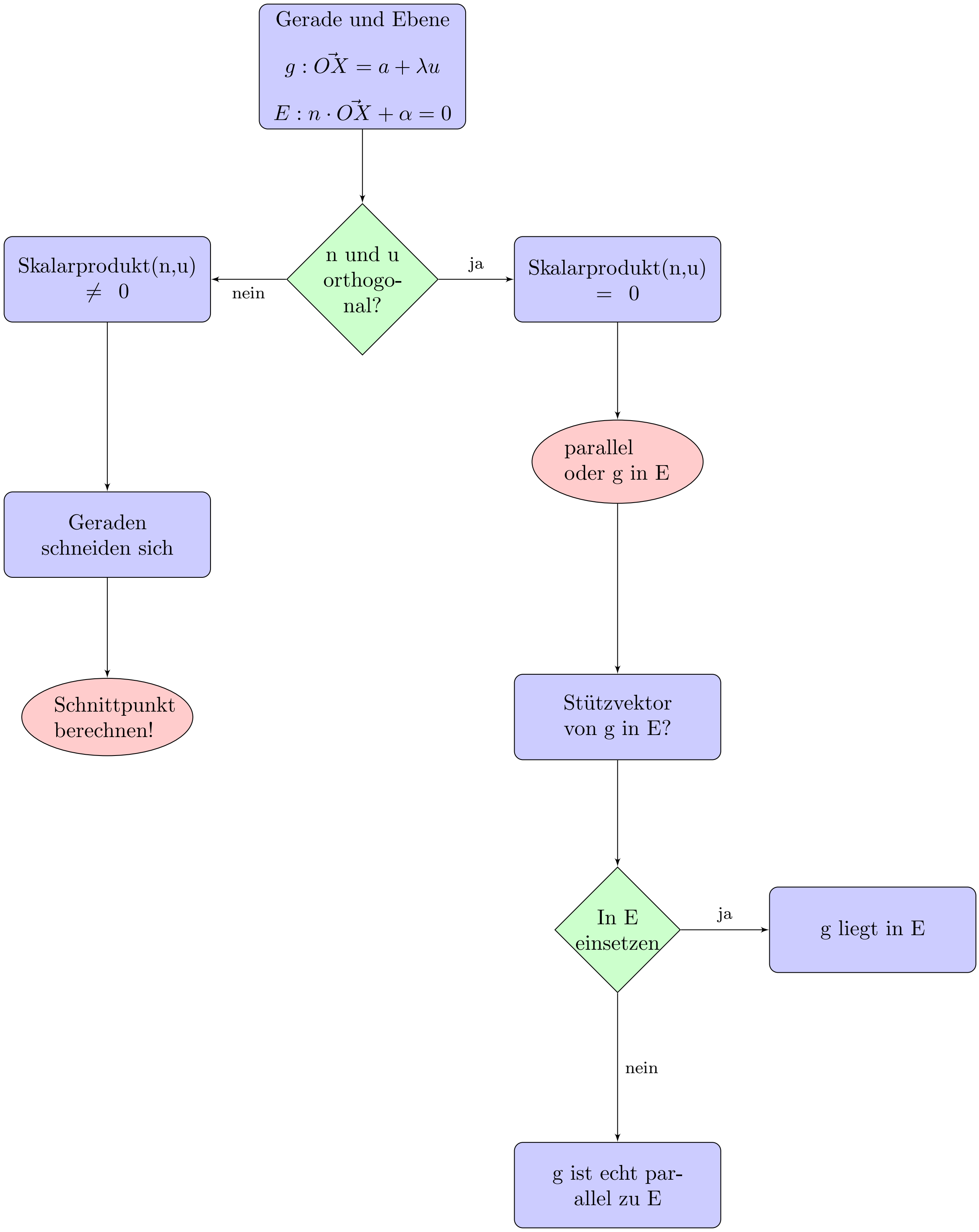
Der Schnittpunkt ist also S(3/4/4).
Um den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene zu bestimmen, berechnet man den Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden. Der gesuchte Schnittwinkel ist der Ergänzungswinkel zu 90°.

$$cos(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}| \cdot |\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}|} = \frac{3 + 6 - 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{22}}$$

$$\phi = 52,46°$$

Der gesuchte Winkel zwischen Gerade und Ebene ist also: $\psi = 37,54°$.

4 Graphische Übersicht Gerade - Ebene:



5 Ebene und Ebene

Wenn die Lagebeziehung zweier Ebenen bestimmt werden soll, ist es am besten, wenn die eine Ebene in der Parameterform, die andere in der Normalenform vorliegt. Gegebenenfalls muss man eine der Ebenengleichungen in die jeweils andere Form überführen. Wir betrachten das folgende Beispiel:

$$E: \quad \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$F: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{OX} - 21 = 0$$

Ist ein Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor von F und einem Richtungsvektor von E ungleich Null, schneiden sich die Ebenen; sind beide Skalarprodukte gleich Null, sind sie parallel. Also:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 6 + 1 = 6 \neq 0$$

Die Ebenen schneiden sich also. Daher setzt man den Term aus der Parameterform in die Normalenform ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}] - 21 = 0$$

Auflösen nach λ ergibt

$$\lambda = 2 - 2\mu$$

Durch Einsetzen in die Ebenengleichung von E erhält man:

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (2 - 2\mu) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung der Schnittgerade in der Parameterform.

Um den Schnittwinkel der beiden Ebenen zu bestimmen, berechnet man den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren der Ebenen. Diese bilden denselben Winkel untereinander wie die beiden Ebenen, da sie paarweise aufeinander senkrecht stehen.
Zur Ebene F ist der Normalenvektor bekannt. Nach dem oben gezeigten Verfahren wird nun der Normalenvektor zu E ermittelt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 3y + z = 0$$

$$und: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 5y - 2z = 0$$

Setze: x = 1

$$\begin{vmatrix} 3y + z & = & 1 \\ 5y - 2z & = & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{lcr} 11y & = & -2 \\ 3y+z & = & 1 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{lcr} y & = & -\frac{2}{11} \\ z & = & 1+\frac{6}{11}=\frac{17}{11} \end{array} \right|$$

Somit ist $n = \begin{pmatrix} 11 \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{17}{11} \end{pmatrix}$ oder $\tilde{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Also gilt für den Winkel zwischen den Ebenen:

$$cos(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{| \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} | \cdot | \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} |} = \frac{11-4+17}{\sqrt{414} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\phi = 61,21^\circ$$

6 Graphische Übersicht Ebene - Ebene: