Mathematik EF

Bernhard Scheideler

Grundaufgaben der Differentialrechnung

Stand: 7. September 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Die Kurvendiskussion

Zentrale Gedanken
• Grundaufgabe • Berechnung von Eigenschaften eines Graphen • Starres Schema

In der Geometrie gibt es einen Grundsatz: Was man konstruieren kann, kann man auch berechnen.
Wir sind zwar nicht im Bereich der Geometrie, sondern der Analysis, aber dies ist ein interessanter Leitgedanke für das, was wir als Erstes mit unseren neuen Kenntnissen anfangen können.
Wenn eine Funktionsgleichung einer stetigen und differenzierbaren Funktion gegeben ist, können wir alle Eigenschaften des Funktionsgraphen berechnen, bevor wir ihn zeichnen. So etwas nennt man in der Fachsprache der Mathematik eine Kurvendiskussion. Sie besteht aus typischen Schritten, die du dir leicht einprägen kannst.
Lass uns dies für die Funktion

$$f: \ f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

einmal durchführen!

1.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Da f eine ganz-rationale Funktion ist, ist f auf dem gesamten Definitionsbereich ($D_f = \mathbb{R}$) stetig und differenzierbar.

1.2 Standardsymmetrie:

Diese Eigenschaft kann bei den ganz-rationalen Funktionen leicht an den Exponenten von x abgelesen werden:

- Nur gerade Exponenten von x : Symmetrie zur y-Achse.
- Nur gerade Exponenten von x : Punktsymmetrie zum Ursprung.
- Gemischte Exponenten: Keine Standardsymmetrie.

Hier sind die Exponenten von x :$3, 2, 1, 0 \quad \rightarrow$ keine Standardsymmetrie.

1.3 Nullstellen:

Dazu setzen wir den Funktionsterm gleich Null und lösen die Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$$

Suche Lösung durch Probieren,
finde: $x = -1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(x^3 + x^2 - 4x - 4 \right) \div \left(x + 1 \right) = x^2 - 4 \\ \underline{- x^3 - x^2} \\ \qquad - 4x - 4 \\ \qquad \underline{\ \ 4x + 4} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4) \cdot (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \vee \quad x = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Nullstellen sind also: $-2, -1, 2$.

1.4 Ableitungen:

Für die bestimmung von lokalen Extrema und Wendestellen brauchen wir die 1. bis 2. Ableitung. Diese Ableitungen stellen wir hier bereit:

$$f: \; f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$
$$f''(x) = 6x + 2$$
$$f'''(x) = 6$$

1.5 Bestimmung der lokalen Extrema:

Die notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 + 2x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{12}{9} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9} \\ \Leftrightarrow & (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{13}{9} \\ \Leftrightarrow & x + \frac{1}{3} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{13} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3} \end{array}$$

Eine hinreichende Bedingung:

Eine hinreichende Bedingung ist: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{array}{ll} f'''(\frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3}) & = 6(\frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3}) + 2 \\ & = 2\sqrt{13} - 2 + 2 = 2\sqrt{13} > 0 \\ & \rightarrow \quad \text{lokales Maximum.} \end{array}$$

1.6 Wendestellen:

Die notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} & f''(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 6x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 6x = -2 \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Eine hinreichende Bedingung:

Eine hinreichende Bedingung ist: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$$

$$\rightarrow \quad \text{Wendestelle bei } x = -\frac{1}{3}$$

1.7 Globalverlauf:

Hier interessieren wir uns für die Frage, wie der Graph am Rande des Koordinatensystems verläuft, also wenn x sehr groß ($x \to \infty$) oder sehr klein ($x \to -\infty$) ist.
In diesen Fällen brauchen wir nur den Summenden mit der größten Potenz von x im Funktionsterm betrachten.
Hier: x^3 .
Ist x sehr klein ($x \to -\infty$), ist x^3 ebenfalls negativ und sehr klein (z.B.: -1.000.000).
Ist x sehr groß ($x \to \infty$), ist x^3 ebenfalls sehr groß. Wir schreiben das folgendermaßen auf:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

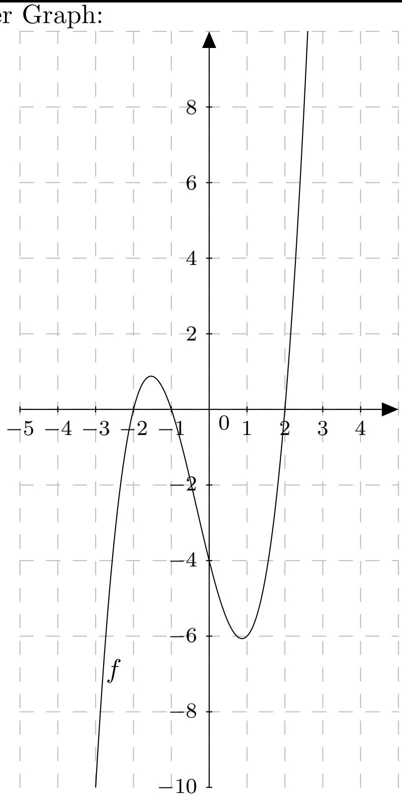
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

1.8 Wertetabelle und Graph:

Wir bestimmen jetzt noch ein paar Funktionswerte (von den lokalen Extrema, den Wendepunkten, dem Schnittpunkt mit der y-Achse) und können dann den Graphen relativ leicht zeichnen:
Wertetabelle:

x	y	Beschreibung
0	-4	Achsenabschnitt
-2	0	Nullstelle
-1	0	Nullstelle
2	0	Nullstelle
$\frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3}$	-6,06	lokales Minimum
$-\frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3}$	0,88	lokales Maximum
$-\frac{1}{3}$	- 2,59	Wendepunkt

Der Graph:



2 Funktionsbestimmungen

Zentrale Gedanken

- Bestimmung eines Funktionsterms
- Variablen und Parameter
- Überprüfung hinreichender Bedingungen
- Lösen Linearer Gleichungssysteme

Im zurückliegenden Mathematikunterricht hast du schon häufiger die Aufgabe bekommen, zu gegebenen Punkten die zugehörige Funktionsgleichung der Funktion, die durch diese Punkte verläuft, zu bestimmen.
Für eine lineare Funktion waren 2 Punkte notwendig, für eine quadratische Funktion drei Punkte, usw.
Die Notwendigkeit, so zu verfahren, ergibt sich immer, wenn man Daten erhebt oder mißt, also zunächst nur einzelne Wertepaare gegeben hat und danach nach einer Funktionsgleichung sucht, die den Zusammenhang beschreibt. Dies kommt in der Praxis nicht selten vor.
Manchmal hat man aber nicht nur einzelne Wertepaare, sondern weiß eventuell, dass urgendwo ein Maximum oder Minimum existiert. Daher gehen wir die Angelegenheit etwas algemeiner an:
Zu einer mathematischen Funktion liegen Informationen vor, die gebutzt werden sollen, um eine Funktionsgleichung zu bestimmen.
Solche Aufgaben geht man meist in einer typischen Abfolge von Schritten an, die ich dir an einem Beispiel verdeutlichen möchte:

Aufgabe:
Eine punktsymmetrische Funktion 5.Grades geht durch die Punkte N(2/0) und A(-1/-2). Die Tangente im Ursprung verläuft waagerecht.

Lösung des Problems:

2.1 Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung:

Ein Funktion 5. Grades enthält im Funktionsterm im Prinzip 6 Summanden. Jeder Summand besteht aus einer Potenz von x, angefangen bei x^4 bis x^0, und einem reellen Faktor davor. Da die Faktoren unbekannt sind, ersetzen wir sie durch variablen: a,b, ...
Im Funktionsterm kommen aber auch andere Variable vor, wie z.B.: x .
Um hier fachsprachlich etwas differenzieren zu können, benutzt man in der Mathematik zusätzlich zum Begriff Variable (aus dem Lateinischen kommend) noch den Begriff Parameter[1] (aus dem Griechischen kommend). Es geht in unserer Aufgabe also darum, die Parameter a, b, ... zu bestimmen.

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

nennt man die allgemeine Funktionsgleichung einer Funktion 5. Grades.
In der Aufgabenstellung steht aber ein wichtiger Hinweis: Die gesuchte Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Solche ganz-rationalen Funktionen haben aber nur Summanden mit ungraden Potenzen von x im Funktionsterm. Wir können

[1] Betonung auf dem 2. a.

daher die Funktionsgleichung etwas vereinfachen und die Anzahl der Parameter reduzieren:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

Vorsorglich bilden wir die erste und zweite Ableitung dieser Funktion:

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^3 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

2.2 Suchen nach Informationen:

Wir haben einen Funktionsterm mit drei Parametern. Daher müssen wir die Beschreibung der Funktion solange aufmerksam lesen, bis wir drei unabhängige Informationen über sie gefunden haben.
Als erstes sehen wir natürlich, dass der Punkt N(2/0) ein Punkt der Funktion ist: Info 1.
Als weiterer Punkt ist der Punkt A gegeben: Info 2.
Man kann aus dem Aufgabentext darüber hinaus herauslesen, dass der Graph durch den Ursprung geht. Aber alle punktsymmetrischen Funktionen gehen durch den Ursprung. Diese Information haben wir schon bei der Symmetrie verbraucht, sie hilft uns nicht mehr weiter.
Schauen wir also noch einmal nach: Die Tangente im Ursprung verläuft waagerecht. Die Steigung der Tangente im Ursprung ist also Null. Außerdem weißt du, dass die Tangentensteigung die 1. Ableitunf ist. Also:
$f'(0) = 0$: Info 3 .

2.3 Einsetzen und lineare Gleichungen aufstellen :

Die gefundenen Informationen müssen jetzt in Rechenbares umgewandelt werden. Dazu setzen wir entsprechende Werte in die allgemeine Funktionsgleichung oder deren Ableitungen ein:

$N(2/0)$	$\rightarrow$	$f(2) = 0$	$\rightarrow$	$32a + 8b + 2c = 0$
$A(-1/-2)$	$\rightarrow$	$f(-1) = -2$	$\rightarrow$	$-a - b - c = -2$
waag. Tangente	$\rightarrow$	$f'(0) = 0$	$\rightarrow$	$c = 0$

2.4 Lösen des linearen Gleichungssystems:

Du hast nunmehr ein lineares Gleichungssystem erhalten, dass du nur noch zu lösen hast.
Da man den Wert von c direkt ablesen kann, setzen wir in die anderen Gleichungen für c direkt ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem mit 2 Variablen und 2

Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{c} 32a + 8b = 0 \\ -a - b = -2 \end{array} \right| \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{c} 32a + 8b = 0 \\ -8a - 8b = -16 \end{array} \right| \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{c} 24a = -16 \\ -a - b = -2 \end{array} \right| \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{c} a = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3} \\ b = -2 + a \end{array} \right| \\
\Leftrightarrow & \left| \begin{array}{c} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \end{array} \right|
\end{aligned}
$$

2.5 Angeben des Ergebnisses, evtl. Überprüfung:

Unsere Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^3$$

Wäre in der Funktionsbeschreibung von Extrema oder Wendestellen die Rede gewesen, hätten wir das umgesetzt, indem wir die jeweilige notwendige Bedingung benutzt hätten.In diesem Fall mußt du am Ende mit einer hinreichenden Bedingung prüfen, ob die beschreibenen Eigenschaften bei der gefundenen Funktion wirklich vorliegen. In unserem Beispiel lad eine solche Situation aber nicht vor. Daher sind wir fertig.

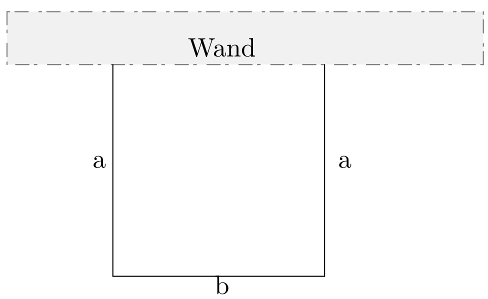
3 Extremwertaufgaben

Zentrale Gedanken

- Absolute und lokale Extrema
- Mathematische Modelle
- Hoher Anwendungsbezug
- Viele Wege führen zum Ziel

Situationen, in denen man etwas maximieren oder minimieren möchte, treten sehr häufig auf. Eine Firma möchte z.B. ihren Gewinn maximieren oder die Kosten für die Produktion minimieren. In den Wirtschaftswissenschaften gibt es ausgeklügelte Theorien für solche Fälle. Viele Bücher werden damit gefüllt.
Um solche Probleme mathematisch zu lösen, braucht man eine Funktion, die die Situation beschreibt. Damit hat man ein mathematisches Modell der Wirklichkeit, innerhalb dessen Maxima und Minima bestimmt werden können. Einfache Aufgaben dieser Art behandelt man auch im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe unter der Überschrift Extremwertaufgaben.
Wir wollen eine solche Aufgabe einmal exemplarisch angehen und systematisch, in klar definierten aufeinanderfolgenden Schritten lösen.
Eine meiner Lieblingsaufgaben ist die folgende:

Aufgabe:
Herr K. möchte auf seinem Grundstück ein Gehege für seine Kaninchen anlegen. Eine Seite des Geheges wird durch eine lange Mauer begrenzt. Für die anderen Seiten hat Herr K. eine 15m lange Rolle Maschendraht. Als ordentlicher Mensch nimmt er sich vor, dass das Gehege auf jeden Fall rechtwinklig sein soll.
Wie also soll Herr K. die Abmessungen des Geheges wählen, wenn die Fläche für die Kaninchen möglichst groß sein soll?



Klar ist, es geht um einen Flächeninhalt, den Flächeninhalt eines Rechtecks, das maximal werden soll.
Um den Flächeninhalt bestimmen zu können, ist der erste Schritt, dass wir Variablen für die Seitenlängen festlegen. Unbedingt gehört in diesem Rahmen auch dazu, dass wir für die Variablen einen Definitionsbereich angeben:

- a ist die Länge der Seite des Rechtecks, die senkrecht zur Mauer steht. Diese Seite kommt zweimal vor. Wenn man die gesammte Rolle Draht nur für a benutzt (ein Extremfall), kann a maximal 7,5m lang sein, da die Drahtrolle insgesammt 15m mißt. Negative Längen sind nicht möglich. Daher können wir den Geltungsbereich (Definitionsbereich) von a folgendermaßen beschreiben:

$$0 \leq a \leq 7,5$$

- b ist die Länge der Seite des Geheges, die parallel zur Mauer verläuft. Theoretisch können wir für b maximal die gesammte Rolle Draht verwenden. Daher gilt für b:

$$0 \leq b \leq 15$$

Jetzt brauchen wir eine Funktion, die unsere Situation beschreibt. Dazu fragen wir: "Wass soll maximal oder minimal werden?"
Die Antwort darauf lautet: Der Flächeninhalt. Der Flächeninhalt ist also unsere Zielfunktion. Für den Flächeninhalt eines Rechtecks gilt die Formel: Länge x Breite; also hier:

$$Z(a,b) = a \cdot b$$

Diese Zielfunktion besitzt aber einen Schönheitsfehler, sie hängt von zwei Variablen ab. Damit wir das Problem (unsere Aufgabe) mit den erlernten Verfahren lösen können, müssen wir dafür sorgen, dass die Anzahl der Bariablen auf eins reduziert wird.
Dazu suchen wir eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen den Variablen herstellt. So etwas nennt man in der Mathematik eine Nebenbedingung.
Hier können wir ausnutzen, dass die Drahtrolle insgesamt 15m lang ist. Es gilt also:

$$a + b + a = 15 \quad \text{oder} \quad 2a + b = 15$$

Diese Nebenbedingung lösen wir nach a oder b hin auf und setzen den gefundenen Term in die Zielfunktion ein. In diesem Fall entscheide ich mich dafür, nach b hin aufzulösen, weil das einfacher ist:

$$\begin{aligned} & 2a + b = 15 \\ \Leftrightarrow \quad & b = 15 - 2a \end{aligned}$$

Also:

$$Z(a) = a \cdot (15 - 2a) = 15a - 2a^2$$

Jetzt habe ich eine Zielfunktion mit einer Variablen und kann auf die bewährte Art und Weise lokale Maxima suchen.
Zuerst bestimme ich die Ableitungen:

$$Z(a) = 15a - 2a^2$$

$$Z'(a) = 15 - 4a$$

$$Z''(a) = -4$$

Danach filtere ich mit der notwendigen Bedingung:

$$\begin{aligned} & Z'(a) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 15 - 4a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 15 = 4a \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{15}{4} = a \end{aligned}$$

Nun schaue ich, was die 2. Ableitung an dieser S telle macht und benutze sie für eine Schlußfolgerung:

$$Z''(\frac{15}{4}) = -4 \leq 0$$

Da $Z'(\frac{15}{4}) = 0$ und $Z''(\frac{15}{4}) \leq 0$, liegt bei $a = \frac{15}{4}$ ein lokales Maximum der Zielfunktion vor.
Fertig bin ich aber noch nicht. Denn ich suche nicht speziell nach lokalen Maxima sondern nach dem grö0ten Funktionswert im Definitionsbereich.
Da für a gilt: $0 \leq a \leq 7,5$, berechne ich:

- $$Z(0) = 0$$
- $$Z(\frac{15}{4}) = 15 \cdot \frac{15}{4} - 2 \cdot (\frac{15}{4})^2 = \frac{15^2}{4} - \frac{15^2}{8} = \frac{15^2}{8}$$
- $$Z(7,5) = 15 \cdot 7,5 - 2 \cdot (7,5)^2 = 15 \cdot \frac{15}{2} - 2 \cdot (\frac{15}{2})^2 = \frac{15^2}{2} - \frac{15^2}{2} = 0$$

Damit ist klar: Das lokale Maximum ist auch das <u>absolute Maximum</u>.
Jetzt bleibt nur noch, den zu $a = \frac{15}{4} = 3,75$ passenden Wert für b zu berechnen und eine Antwort zu formulieren:

$$b = 15 - 2ab = 15 - 2 \cdot \frac{15}{4} = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

<u>Antwort:</u> Herr K. sollte die Gehegemaße mit $a = 3,75m$ und $b = 7,5m$ wählen.

Halten wir am Ende die Abfolge der Schritte zur besseren Übersicht noch einmal fest:

- Skizze
- Definition von Variablen mit ihrem Definitionsbereich
- Aufstellen einer Zielfunktion
- ggfs. Aufsuchen von Nebenbedingungen
- Zielfunktion mit <u>einer</u> Variablen
- Ermitteln der lokalen Minima oder Maxima
- Berechnung des absoluten Minimums oder Maximums durch Vergleich der Funktionswerte am Rand des Definitionsbereichs mit den Funktionswerten der lokalen Extrema
- Berechnung der anderen Variablen
- Formulierung einer Antwort im Sachzusammenhang