Name: ____________________

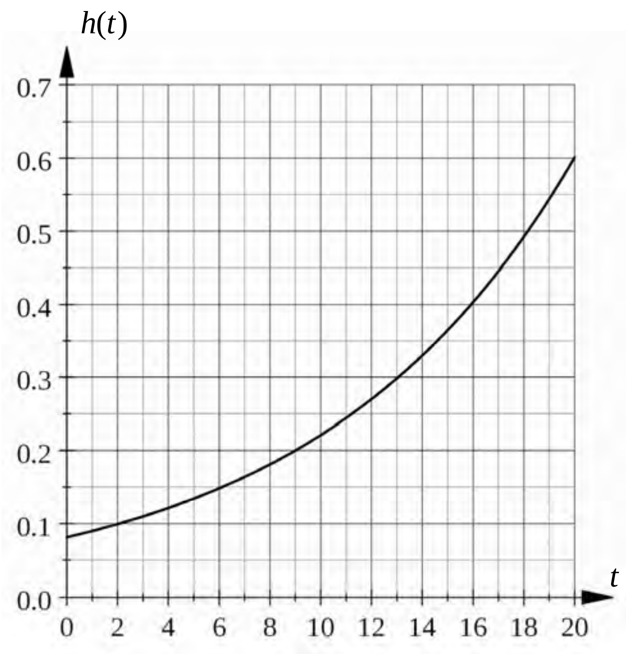
Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$ (t in Tagen, $h(t)$ in Metern) beschrieben. Vom Beginn des 21. Tages an $(t = 20)$ verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Zuwachsrate bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit der Funktionsgleichung $z(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$.

a) *Berechnen Sie den Funktionswert von h an der Stelle $t = 0$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. Geben Sie anhand der nebenstehenden Abbildung an, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat. Bestimmen Sie den Wert rechnerisch.*



(12 Punkte)

Name: _____________________

b) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt t innerhalb der ersten zwanzig Tage* $(0 \leq t \leq 20)$, *an dem die Pflanze am schnellsten wächst. Berechnen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.*
Begründen Sie, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann. (11 Punkte)

c) *Bestimmen Sie, wie groß der Strauch am Ende des 20. Tages ist und um wie viel er in den folgenden 10 Tagen wächst.* (10 Punkte)

d) *Ermitteln Sie einen Term* $h_2(t)$, *der die Höhe des Strauches nach t Tagen* $(t > 20)$ *beschreibt.*
Begründen Sie anhand dieses Terms, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und geben Sie die maximale Höhe des Strauches an.

[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}, t > 20$] (10 Punkte)

e) Alternativ zur Funktion *h* werde die Höhe des Strauches im Intervall $[0;20]$ durch eine beliebige andere (differenzierbare) Modellfunktion f beschrieben.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen dieser Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall $[0;20]$. (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

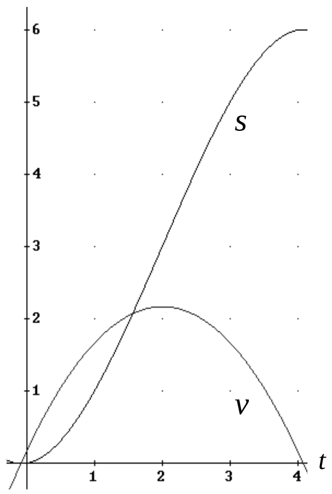
Im Rahmen eines Schulprojektes führen Schülerinnen und Schüler unterstützt durch die Polizei eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einem 6 km langen Stück Landstraße werden nach Kilometer 1, 3 und 6 die Fahrzeiten gemessen. Die Messstrecke beginnt an einem Stoppschild; die zulässige Höchstgeschwindigkeit auf der Landstraße beträgt 100 km/h. Ihre Messergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Tabelle festgehalten:

Messung	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Zeitpunkt t in Minuten	0	1	2	4
Zurückgelegter Weg $s(t)$ in km	0	1	3	6

Die Funktion $s(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $v(t)$ und die Beschleunigung zum Zeitpunkt t wird mit $a(t)$ bezeichnet.

Es gilt: $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$.



a) Eine Schülergruppe hat die Messergebnisse mit einer Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades s modelliert, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Bestimmen Sie diese Gleichung. (9 Punkte)

[Zur Kontrolle: $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t$]

Name: ____________________

b) *Berechnen Sie die Extremstellen des Graphen von s und weisen Sie nach, dass das absolute Maximum von s im Zeitraum der durchgeführten Geschwindigkeitsmessung bei* $t = 4$ *liegt. Begründen Sie dies im Sachzusammenhang.* (10 Punkte)

Folgen Sie bei den Aufgabenteilen c) und d) der Annahme, dass die von der Schülergruppe aufgestellte Funktion s den Verlauf der Fahrt angemessen wiedergibt.

c) (1) *Geben Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v an und prüfen Sie, ob der Fahrer am Stoppschild tatsächlich gehalten hat.*

(2) *Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit.*

(3) *Beurteilen Sie mit mindestens zwei unterschiedlichen Argumenten die Angemessenheit der von der Schülergruppe gewählten Modellfunktion für diese Geschwindigkeitskontrolle.* (15 Punkte)

d) (1) *Geben Sie die Gleichung der Beschleunigungsfunktion a an.*

(2) Die Beschleunigung a ist für $0 < t < 2$ positiv, für $t = 2$ Null und für $t > 2$ negativ.

Beschreiben Sie die Bedeutung der Eigenschaften der Funktion a für die Geschwindigkeitsfunktion v. Geben Sie eine mögliche Erklärung für das veränderte Fahrverhalten an. (9 Punkte)

e) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse über dem Intervall* $[0; 2]$. *Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert* $v(2)$ *und interpretieren Sie die Differenz.* (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Eine Funktion f ist gegeben durch

$f(x) = 2x \cdot e^{-4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in der nebenstehenden *Abbildung 1* dargestellt.

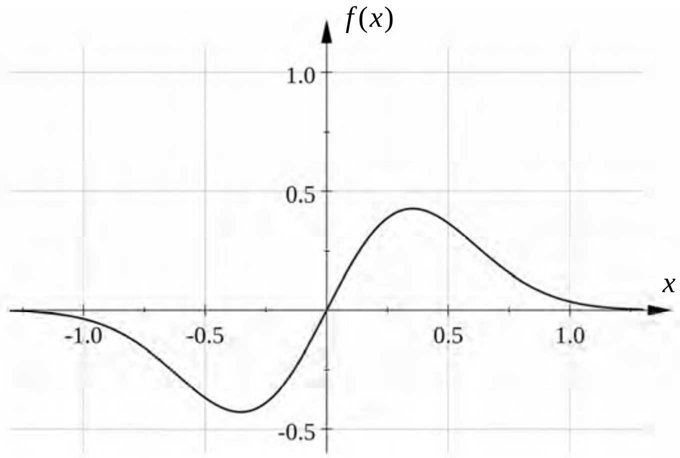


Abbildung 1

a) (1) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und untersuchen Sie sein Unendlichkeitsverhalten.*

(2) *Bestimmen Sie für den Graphen von f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Extrempunkte.*

(3) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f drei Wendepunkte besitzt.* (26 Punkte)

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \left(2 - 16x^2\right) \cdot e^{-4x^2}$]

Name: ____________________

b) Die Punkte $O(0\,|\,0)$, $P(u\,|\,0)$ und $Q(u\,|\,f(u))$, $u > 0$, legen ein rechtwinkliges Dreieck OPQ fest (siehe *Abbildung 2*).

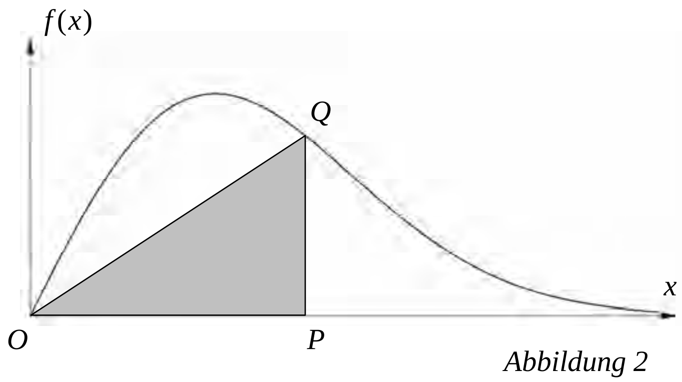


Abbildung 2

Ermitteln Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist. Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: $A(u) = u^2 \cdot e^{-4u^2}$]

c) *Zeigen Sie, dass durch $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}$ eine Stammfunktion von f gegeben ist.*

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;2]$ einschließt.

Begründen Sie, dass sich der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;k]$ einschließt, für immer größer werdende $k \in \mathbb{R}^+$ dem Wert 0,25 FE beliebig annähert. (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In einem Labor wird ein (Probe-)Körper auf 100 °C erhitzt und anschließend bei konstanter Raumtemperatur von 20 °C abgekühlt. Seine Temperatur während des Abkühlens wird durch die Funktion T mit der Gleichung

$$T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}, \ t \geq 0,$$

beschrieben (t in Sekunden, $T(t)$ in °C). *Abbildung 1* zeigt den Graphen der Funktion T.

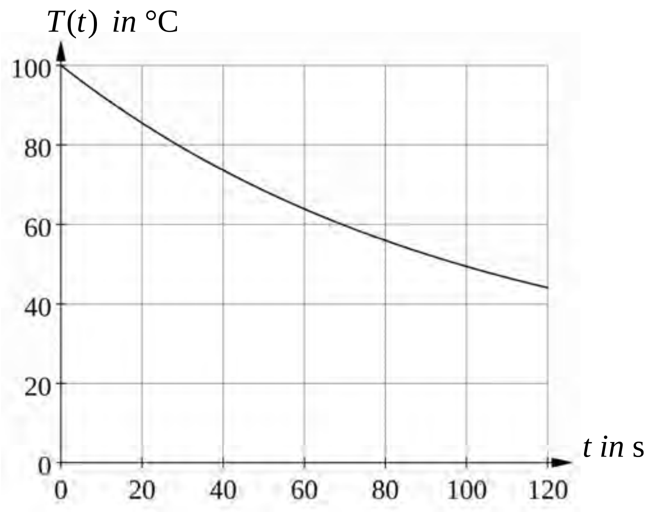


Abbildung 1

a) (1) *Beschreiben Sie den Verlauf des in Abbildung 1 dargestellten Funktionsgraphen von T im Sachzusammenhang.*

(2) *Berechnen Sie die Temperatur, auf die der Körper nach der Zeit* $t = 120$ s *abgekühlt ist.*

(3) *Prüfen Sie die Entwicklung der Temperatur des Körpers für große t.* (10 Punkte)

Name: ____________________

b) Durch $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)\mathrm{d}t$ ist die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb eines Zeitintervalls $[t_1;t_2]$, $0 \le t_1 < t_2$, gegeben.

(1) *Weisen Sie nach, dass die mittlere Temperatur des Körpers im Zeitintervall* $[t_1;t_2]$, $0 \le t_1 < t_2$, *durch* $\frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left(20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01 \cdot t_2} - e^{-0,01 \cdot t_1})\right)$ *berechnet werden kann.*

(2) *Berechnen Sie die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.* (10 Punkte)

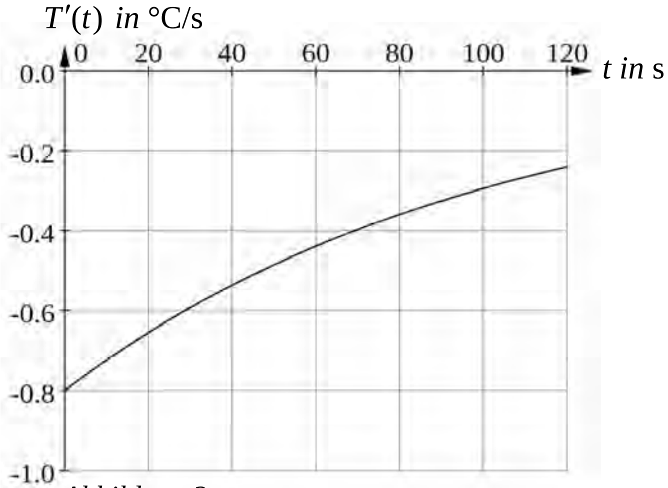


Abbildung 2

c) Die *Abbildung 2* zeigt den Graphen der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers. Es gilt $T'(t) = -0,8 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $t \ge 0$.

(1) *Begründen Sie qualitativ die Eigenschaften des Funktionsgraphen von T in Abbildung 1 mit den Eigenschaften des in Abbildung 2 dargestellten Graphen der Funktion* T'.

(2) *Geben Sie an und begründen Sie, zu welchem Zeitpunkt des Zeitintervalls* $[0;120]$ *der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.*

Name: ____________________

(3) Der Graph der Funktion T' und die t-Achse schließen im Intervall $[0;120]$ ein Flächenstück ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im Sachzusammenhang.

(4) *Ermitteln Sie die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.* (18 Punkte)

d) (1) *Bestimmen Sie die* ***mittlere Änderungsrate*** *der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.*

[Zur Kontrolle: Der gesuchte Wert ist ungefähr $0{,}00466\ °\mathrm{C/s^2}$]

(2) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt des Abkühlungsvorgangs, zu dem die* ***momentane Änderungsrate*** *der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers den Wert der mittleren Änderungsrate seiner Abkühlungsgeschwindigkeit aus (1) hat.* (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

An einer Autobahnbaustelle wird die Stauentwicklung im Berufsverkehr untersucht. Aus den an einem bestimmten Tag erhobenen Messdaten wird die **momentane Änderungsrate** der Staulänge (stark vereinfacht) durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t)=\frac{3}{4}t^3-\frac{9}{2}t^2+6t,\ 0\le t\le 4,$$

modelliert (t in Stunden, $f(t)$ in Kilometern **pro Stunde**). Um 6.00 Uhr $(t=0)$ beginnen sich die Fahrzeuge zu stauen. Der Graph von f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

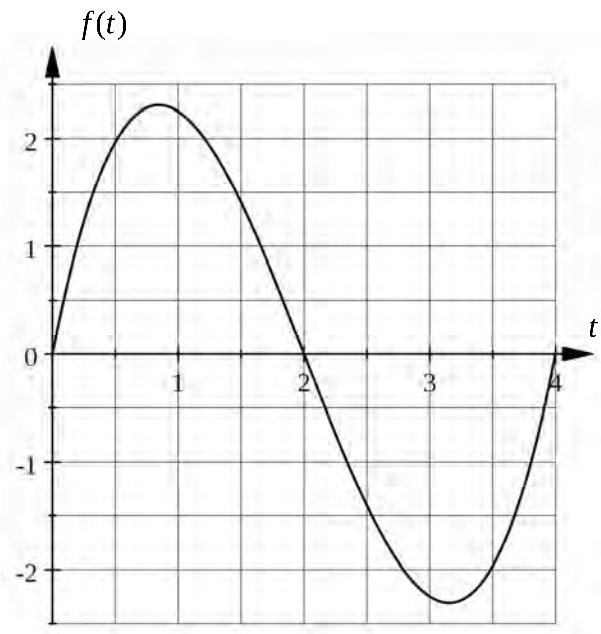


Abbildung 1

Name: ____________________

a) *Berechnen Sie die Nullstellen von f und erklären Sie die Bedeutung positiver und negativer Funktionswerte von f im Sachzusammenhang.* (6 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen die Staulänge am schnellsten zunimmt bzw. abnimmt.* (14 Punkte)

c) (1) *Begründen Sie, warum die Funktion F mit der Gleichung $F(t) = \frac{3}{16}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + 3t^2$, $0 \le t \le 4$, die Staulänge zum Zeitpunkt t beschreibt.*

(2) *Berechnen Sie die Staulänge für 6.30 Uhr.*

(3) *Berechnen Sie, um wie viel die Staulänge von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr zunimmt, und geben Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge an.*

(4) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und berechnen Sie diese maximale Staulänge.* (20 Punkte)

Name: ____________________

d) An einem bestimmten Tag beginnt der Stau um 6.00 Uhr $(t = 0)$ und hat sich um 10.00 Uhr $(t = 4)$ vollständig aufgelöst.

(1) *Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, die momentane Änderungsrate der Staulänge an diesem Tag durch die (differenzierbare) Funktion g zu modellieren, deren Graph in Abbildung 2 dargestellt ist.*

(2) *Ermitteln Sie eine notwendige Bedingung, die jede (differenzierbare) Funktion h, die die momentane Änderungsrate der Staulänge an diesem Tag sinnvoll modelliert, erfüllen muss.* (10 Punkte)

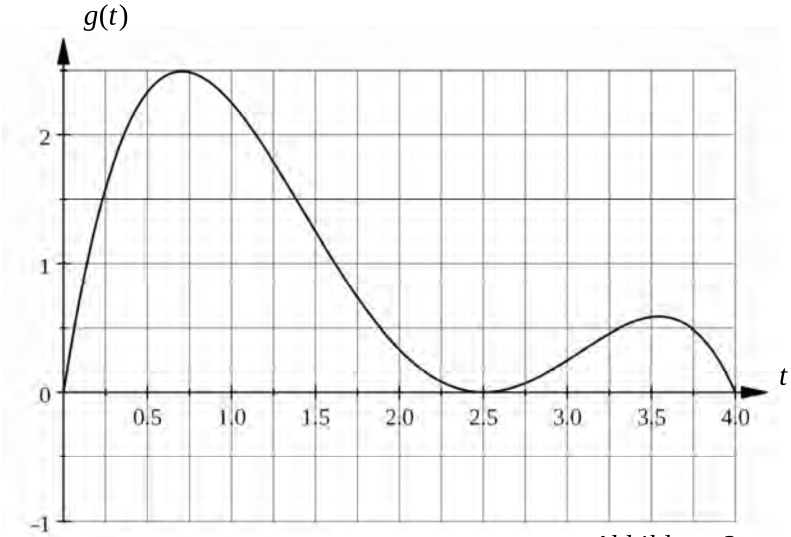


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

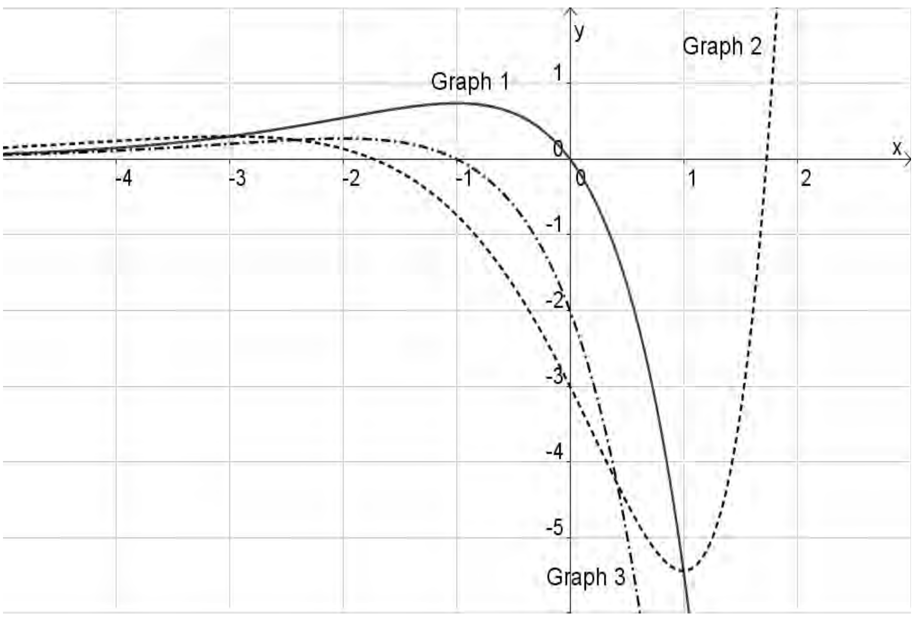
Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = e^x \left(x^2 - 3\right)$, $x \in \mathbb{R}$, und g mit $g(x) = -2x\,e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Graphen von f, g und der Ableitungsfunktion g' von g sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) (1) *Geben Sie an, welcher der abgebildeten Graphen zur Funktion f gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

(2) *Erklären Sie anhand dreier Merkmale, warum es sich bei Graph 3 um den Graphen von g' handeln muss.* (9 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgraphen von f und g in den lokalen Extrempunkten des Graphen von f schneiden.*

[Zur Kontrolle: $E_1\left(-3 \middle| 6e^{-3}\right)$ und $E_2\left(1 \middle| -2e\right)$ sind Schnittpunkte der Graphen von f und g.]

(2) *Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden s, die durch die Schnittpunkte E_1 und E_2 der Graphen von f und g verläuft.*

(3) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden n, die orthogonal zu s liegt und den Graphen von g im Ursprung schneidet.* (18 Punkte)

c) (1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Zeigen Sie, dass der Graph von g für $x < -3$ stets zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt.* (8 Punkte)

d) (1) *Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion von f mit der Differenzfunktion d der Funktionen f und g mit $d(x) = f(x) - g(x)$ übereinstimmt.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt A der durch die Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche auf eine Dezimalstelle genau.*

(3) *Weisen Sie nach, dass durch $F(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x$* eine Stammfunktion von f gegeben ist. (15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Medikament wird über eine (intravenöse) Dauerinfusion dem Körper kontinuierlich und gleichmäßig zugeführt. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut steigt dabei kontinuierlich an und strebt bei „langfristiger Infusion“ auf eine „Endkonzentration“ zu.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_a mit der Funktionsgleichung*

$$f_a(t) = a \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t}) \text{ für } t \geq 0 \ \ (a > 0)$$

die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut angemessen beschreibt, d. h., dass die Funktion die beiden oben im Text genannten Kriterien erfüllt.

(t in Stunden; $f_a(t)$ in mg/l)

Die Graphen von f_5, f_{10} und f_{15} sind in *Abbildung 1* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

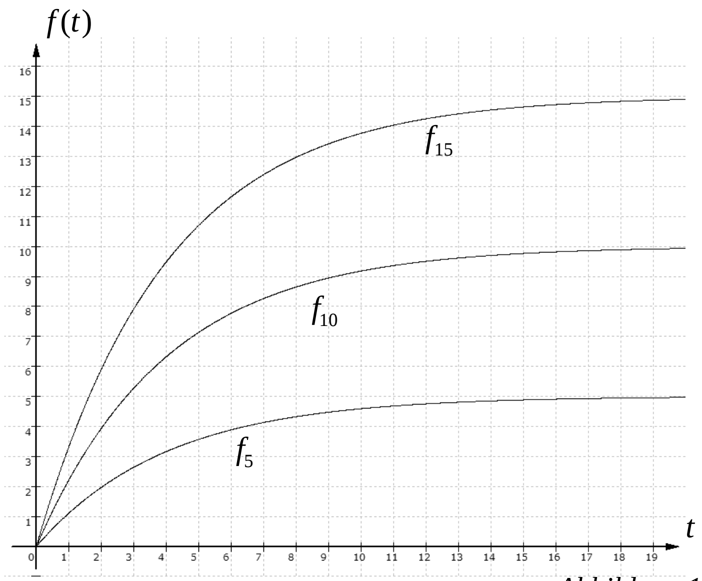


Abbildung 1

Name: ____________________

(2) *Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im Sachzusammenhang. Nutzen Sie dazu den Funktionsterm von f_a und die drei Beispielgraphen.*

Die Infusion wird am 15. April um 9 Uhr ($t = 0$) begonnen.
Um 11 Uhr wird eine Wirkstoffkonzentration des Medikaments von 5,902 mg/l im Blut gemessen.

(3) *Berechnen Sie den Parameterwert von a in der Funktionsgleichung von f_a, die den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration des Medikaments modelliert.*

Im Folgenden soll die Wirkstoffkonzentration durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t})$ modelliert werden.

(4) *Berechnen Sie $f(3)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(17 Punkte)

Wenn die Infusion nach t_{E} Stunden abgebrochen wird, nimmt die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut ab. Modellhaft wird angenommen, dass unmittelbar nach Abbruch der Infusion die Abnahme der Wirkstoffkonzentration beginnt.

Die Wirkstoffkonzentration kann jetzt durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$g(t) = f(t_{\mathrm{E}}) \cdot e^{-0,25 \cdot (t - t_E)}$ ($t \geq t_E$) beschrieben werden.

Um 1 Uhr des nächsten Tages wird die Infusion abgebrochen.

b) (1) *Zeigen Sie, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.*

Der Graph von g ist in *Abbildung 2* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $g(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

(2) *Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Änderung der Wirkstoffkonzentration für $t > 16$.*

(3) *Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Betrag der Änderung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments am 16. April von 4 Uhr bis 5 Uhr abnimmt.*

(11 Punkte)

Name: ____________________

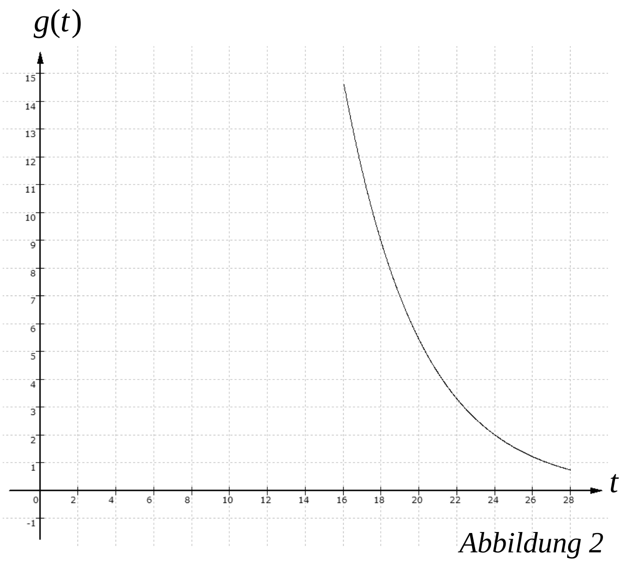


Abbildung 2

c) (1) Medizinische Untersuchungen haben ergeben, dass das Medikament nur wirksam ist, wenn die Wirkstoffkonzentration im Blut mindestens 8 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

(2) Wenn die Funktion h die Wirkstoffkonzentration eines Medikaments beschreibt, wird durch $m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t)\,\mathrm{d}t$ die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall $[t_1;t_2]$ bestimmt.

Ermitteln Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).

Um Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Medikamenten zu vermeiden, wird ein neues Medikament erst eingesetzt werden, wenn die Wirkstoffkonzentration des alten Medikaments unter 1 mg/l im Blut beträgt.

Am 16. April um 10 Uhr wird mit der intravenösen Dauerinfusion eines neuen Medikaments begonnen.

(3) *Prüfen Sie, ob die Aufnahme der Infusion mit dem neuen Medikament zu diesem Zeitpunkt im Sachzusammenhang sinnvoll ist.* (22 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Das Logo der Firma Westwerk ist eine Fläche, deren Rand sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch Teile der Graphen der Funktionen g und h mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x^4 - 3{,}75x^2 - 1,$$

$$h(x) = x^4 - 3x^2 - 4,\ x \in \mathbb{R},$$

beschreiben lässt (siehe *Abbildung* auf Seite 2). Das Logo wird bei dieser Beschreibung durch die Graphen von g und h eingeschlossen. 1 Längeneinheit entspricht 1 cm.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Logo eine achsensymmetrische Figur ist.*

(2) *Geben Sie die maximale Breite des Logos an.*

(3) Die Punkte P und Q liegen zwei Millimeter direkt „unter" den tiefsten Punkten der oberen Begrenzungslinie des Logos. Zur Befestigung verbindet eine Querstrebe die Punkte P und Q.

Bestimmen Sie rechnerisch die Länge der Querstrebe.

(4) Die Graphen von g und h besitzen jeweils genau zwei Wendepunkte.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wendepunkte der Graphen der Begrenzungskurven des Logos an verschiedenen Stellenliegen.

(26 Punkte)

b) Zum Firmenjubiläum soll das Logo für verdiente Mitarbeiter in Silber produziert werden. Die Dicke soll 1 mm betragen.

(1) *Weisen Sie nach, dass das Volumen von einem Logo* $0{,}8\ \text{cm}^3$ *beträgt.*

(2) *Berechnen Sie die Silbermasse, die für 150 Logos benötigt wird.*

[$1\ \text{cm}^3$ Silber hat eine Masse von 10,5 g.] (9 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Punkte $P(-x\,|\,g(-x))$, $Q(-x\,|\,-4)$, $R(x\,|\,-4)$ und $S(x\,|\,g(x))$ sind für alle $0 < x < a$ $(a \approx 1{,}08)$ die Eckpunkte eines Rechtecks, das ganz im Inneren des Logos liegt. In das Rechteck soll der Name der Firma eingefügt werden.

(1) *Zeichnen Sie das Rechteck für* $x = 0{,}5$ *in die Abbildung.*

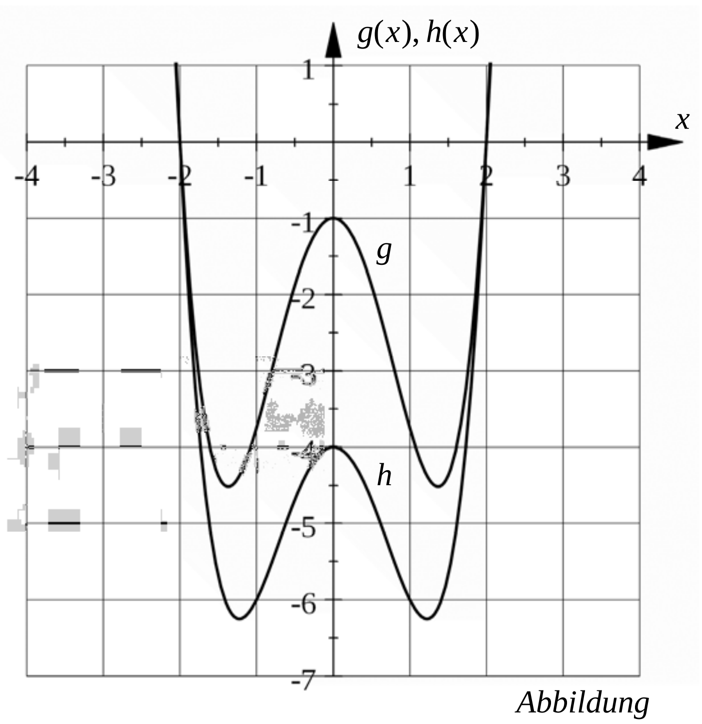
(2) *Weisen Sie nach, dass der Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks allgemein durch die Funktionsgleichung* $A(x) = 2x^5 - 7{,}5x^3 + 6x$ *beschrieben werden kann.*

(3) Unter den Rechtecken gibt es genau ein relativ größtes, das zugleich auch das absolut größte Rechteck ist.

Begründen Sie, dass die Breite des flächengrößten Rechtecks zwischen 1 cm und 1,2 cm liegt.

(4) Für die Beschriftung soll das Rechteck eine Breite von 1,5 cm haben.

Berechnen Sie die Höhe des Rechtecks. (15 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

a) (1) Der Graph einer ganzrationalen Funktion *f* dritten Grades ist zum Ursprung symmetrisch und verläuft durch den Punkt $P(3\,|\,0)$. Außerdem beträgt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion *f* im Ursprung $-4{,}5$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

[Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x,\ x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist auf Seite 2 dargestellt.]

(2) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(3) *Untersuchen Sie, ob einer der Extrempunkte der Funktion f auf der Tangente im Wendepunkt liegt.* (16 Punkte)

b) Streckt man den Graphen der Funktion f in *y*-Richtung mit dem (positiven) Streckfaktor *k*, so entsteht der Graph der Funktion *h*. Dieser Graph schließt mit der *x*-Achse eine Fläche vom Inhalt $A = 4{,}5$ FE ein.

(1) *Bestimmen Sie den Streckfaktor k.*

[Zur Kontrolle: $k = \frac{2}{9}$]

(2) *Geben Sie eine Gleichung der Funktion h an.* (8 Punkte)

c) (1) Gegeben ist die Gerade g_m mit der Gleichung $g_m(x) = mx,\ x \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweisen Sie: Genau für $m > -1$ schneidet die Gerade g_m den Graphen der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = \frac{1}{9}x^3 - x,\ x \in \mathbb{R}$, in drei Punkten.

(2) *Weisen Sie nach: In* c) (1) *ergeben sich für $m > -1$ die Schnittpunkte $P_1(0\,|\,0)$, $P_2(3\sqrt{m+1}\,|\,3m\sqrt{m+1})$ und $P_3(-3\sqrt{m+1}\,|\,-3m\sqrt{m+1})$.* (9 Punkte)

Name: ____________________

d) Für $m > -1$ sei $A(m)$ der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion *h* (mit der in c) (1) angegebenen Gleichung) und der Geraden g_m aus c) (1) eingeschlossen wird.

(1) *Erstellen Sie eine geeignete Skizze für* $m = -\frac{1}{3}$.

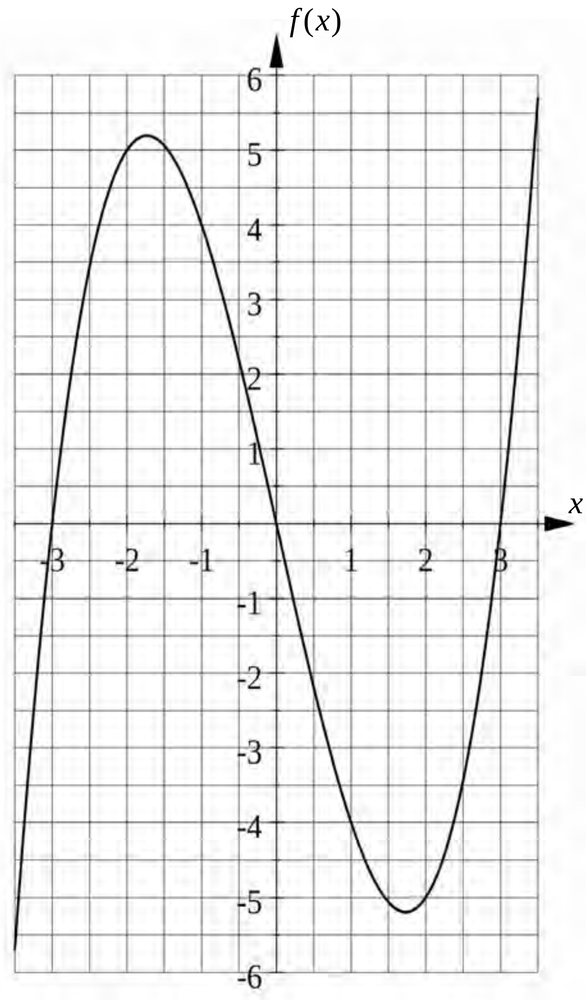
(2) *Zeigen Sie:* $A(m) = 4{,}5(m+1)^2$.

(3) Der Graph der Funktion *h* wird im I. Quadranten durch die Gerade g_3 im Punkt *S* und im IV. Quadranten durch die Gerade $g_{-\frac{1}{3}}$ im Punkt *T* geschnitten.

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte.

(4) *Stellen Sie die Gerade* g_3 *und die Strecke* $\overline{ST}$ *in der Skizze aus* d) (1) *dar.*

(5) *Bestimmen Sie mit Hilfe von* d) (2) *den Inhalt der Fläche, die von der Strecke* $\overline{ST}$ *und dem Graphen von h eingeschlossen wird.*



(17 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung